МОУ «ООШ с.Медяниково Воскресенского района   
Саратовской области»

*Методика решения математических задач  
 в 5 -9 классах.*

*Автор: учитель математики МОУ   
 «ООШ с.Медяниково»   
 Амаханов Малик Максимович.*

Медяниково -2010 г

**Содержание.**

1.Введение…………………………………………………………..3

2.Виды задач………………………………………………………..4

3.Составные части задачи…………………………………………5

4.Схематическая запись условия задачи…………………………...6

5.Этапы решения задач……………………………………………..9

6.Стандартные задачи и их решение………………………………13

7.Заключение………………………………………………………..14

8.Приложение 1……………………………………………………..15

9.Приложение 2……………………………………………………..16

**1. Введение.**

Решение задач занимает в математическом образовании огромное место. Обучению решению задач уделяется много внимания, но единственным методом такого обучения является показ способов решения определенных видов задач и значительная, порой изнурительная практика по овладению ими.

***Решить математическую задачу*** - это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям, получаем то, что требуется в задаче, - ее ответ.

Очень часто у учащихся не формируются общие умения и способности решения задач.

Основной причиной несформированности у учащихся общих умений и способностей в решении задач состоят в том, что школьникам не даются необходимые знания о сущности задач и их решений, а поэтому они решают задачи, не осознавая должным образом свою собственную деятельность. У учащихся не вырабатываются отдельно умения и навыки в действиях, входящих в общую деятельность по решению задач, и поэтому им приходится осваивать эти действия в самом процессе решения задач, что многим школьникам не под силу. Не стимулируется постоянный анализ учащимися своей деятельности по решению задач и выделению в них общих подходов и методов, их теоретического осмысления и обоснования.

Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня математического развития, глубины освоения учебного материала. Поэтому любой экзамен по математике, любая проверка знаний содержит в качестве основной и, пожалуй, наиболее трудной части решение задач.

При этом обнаруживается, что многие из учащихся не могут показать достаточные умения в решении задач. На экзаменах в школе довольно часто встречаются случаи, когда ученик показывает, казалось бы, хорошие знаний в области теории, знает все требуемые определения и теоремы, но запутывается при решении весьма несложной задачи.

Некоторые ученики овладевают общим умением решения задач, а многие, встретившись с задачей незнакомого или малознакомого вида, теряются и не знают, как к ней подступиться.

Причиной этого является то, что одни ученики вникают а процесс решения задач, стараются понять, в чем состоят приемы и методы решения задач, изучают задачи, а другие не задумываются над этим, стараются лишь как можно быстрее решить заданные задачи. Эти учащиеся не анализируют в должной степени решаемые задачи и не выделяют из решения общие приемы и способы.

У большинства учащихся весьма смутные, а порой и неверные представления о сущности решения задач, о самих задачах. Некоторые ученики не представляют, из чего складывается анализ задачи, в чем смысл задач на доказательство и т.д.

Наблюдения показывают, что многие учащиеся решают задачи по образцу. Встретившись с задачей незнакомого типа, заявляют: «А мы такие задачи не решали».

Конечно, любые задачи научиться решать невозможно, но если говорить о школьных задачах, то каждый ученик в принципе может научиться их решать. Для того чтобы научиться решать задачи, надо много поработать. Но эта работа не сводится к решению большого числа стандартных задач. Надо научиться к такому подходу к задаче, при котором задача выступает как объект тщательного изучения, а ее решение - как объект конструирования и изобретения.

**2. Виды задач.**

Задачи, которые решаются в школе, различаются характером своих объектов. В одних задач объектами являются реальные предметы, а в других - все объекты математические (числа, геометрические фигуры, функции и т.д.). Первые задачи, в которых хотя бы один объект есть реальный предмет, *называются практическими* (житейскими, текстовыми, сюжетными); вторые, все объекты которых математические, называются *математическими* задачами.

Обычно при решении практических задач обращаю внимание учащихся на то, что в задаче все данные реальные и ответ должен соответствовать реальным значениям.

**3.Составные части задачи.**

Если приглядеться к любой задаче, то увидим, что она представляет собой требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче. Приступая к решению какой либо задачи, надо ее внимательно изучить, установить, в чем состоят её требования, каковы условия, исходя из которых надо решать задачу, т.е. анализировать задачу. Обязательно нужно четко выделить *условия и требования* задачи.

*Рассмотрим пример.*

Задача. *В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найти катеты треугольника.*

Выделим в данной задаче определенные *утверждения и требования.*

В ней утверждается, что «в прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12см». Требование задачи состоит в том, что нужно «найти катеты треугольника». Часто требование задачи формулируется в виде вопроса, а утверждения задачи называются условиями задачи.

В задаче обычно не одно условие, а несколько независимых элементарных (т.е. нерасчленимых дальше) условий; требований в задаче также может быть не одно.

Выделим в данной задаче отдельные элементарные условия и требования:

1. треугольник, о котором идет речь в задаче, прямоугольный;
2. в этот треугольник вписана окружность;
3. точка касания окружности с гипотенузой делит ее на два отрезка;
4. длина одного из этих отрезков равна 5 см;
5. длина другого катета равна 12 см.

Требования этой задачи можно расчленить на два элементарных:

1. найти длину одного катета треугольника;
2. найти длину другого катета.

Анализируя задачу, все время нужно сопоставить этот анализ с требованием задачи, т.е. анализ задачи всегда направлен на требование задачи.

Результаты предварительного анализа задач надо как-то зафиксировать, записать. Словесная, описательная форма записи малоудобна. Надо записать результаты анализа задач в более удобной, компактной, но наглядной форме. Такой формой является *схематическая запись* задачи.

**4.Схематическая запись условия задачи.**

Нужно заметить, что не для всякой задачи надо сделать схематическую запись. Так, например, для задач по решению уравнений, неравенств, преобразований выражений анализ проводится обычно устно и никак не оформляется. Для задач, которые записаны на символической форме (с помощью общепринятых обозначений и символов), схематическая запись не нужна.

Первой отличительной особенностью схематической записи задач является широкое использование в ней разного рода обозначений, символов, букв, рисунков, чертежей и т.д.

Второй особенностью является то, что в ней четко выделены все условия и требования задачи, а в записи каждого условия указаны объекты и их характеристики. В схематической записи фиксируется лишь только то, что необходимо для решения задачи; все другие подробности, имеющиеся в задаче, при схематической записи отбрасываются.

*Рассмотрим пример составления схематической записи.*

Задача. *С одного участка собрали 1440 ц пшеницы, с другого, площадь которого на 12 га меньше, -1080 ц. Найти площадь первого участка, если известно, что на первом участке собирали пшеницы с каждого гектара на 2 ц больше, чем на втором.*

Анализ задачи показывает, что в ней рассматривается сбор урожая пшеницы с двух участков, при этом этот сбор характеризуется тремя величинами: массой собранной пшеницы, площадью участка и урожайностью. Исходя из этого, составим таблицу для схематической записи условий и требований задачи. Неизвестные величины, встречающие в задаче, запишем в таблице буквами, притом искомое обозначим буквой х:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Участки | Масса собранной пшеницы, ц | Урожай с 1 га, ц | Площадь участка, га |
| Первый | *1440* | *а+2* | *х* |
| Второй | *1080* | *а* | *х-12* |

В данной схематической записи выделены все условия, их объекты и характеристики. Указано и требование задачи: найти площадь первого участка. В то время эта запись очень компактная, наглядная и полностью заменяет формулировку задачи.

*Для схематической записи геометрических задач полезно использовать чертеж. К чертежу предъявляется ряд требований:*

1.Чертеж должен представлять собой схематический рисунок основного объекта задачи (геометрической фигуры, или совокупности фигур, или какой-то части этих фигур) с обозначением с помощью букв и других знаков всех элементов фигуры и некоторых его характеристик. Иногда можно самому придумать наиболее удобные обозначения, если их нет в задаче.

2. Чертеж должен соответствовать задаче. Это означает, что если в задаче в качестве основного объекта назван, например, треугольник и при этом не указан его вид, то надо построить какой-нибудь разносторонний треугольник.

1. При построении чертежа нет надобности выдерживать строго какой-либо определенный масштаб. Однако желательно соблюдать какие-то пропорции в построении отдельных элементов фигуры.
2. При построении чертежей пространственных фигур необходимо соблюдать все правила черчения. Там, где это можно и целесообразно, лучше строить какие-либо плоскостные сечения этих фигур.

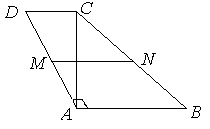
Кроме чертежа, для схематической записи геометрических задач используется еще краткая запись всех условий и требований задачи. В краткой записи, пользуясь принятыми на чертеже обозначениями, записываются все характеристики и отношения, указанные в условиях задачи. Названия фигур или отдельных ее частей желательно заменять записью их определений. Например, вместо того чтобы писать: *ABCD* - трапеция, можно писать: *АВ* || *CD.*

Все приведенные рекомендации имеют не всеобщий характер, и при решении отдельных задач чертеж фигур и краткая запись условия могут производиться иначе.

Рассмотрим пример схематической записи геометрической задачи с помощью чертежа.

Задача. *Диагональ трапеции перпендикулярна к ее основаниям; тупой угол, прилежащий к большому основанию, равен 120°, а боковая сторона, прилежащая к нему, равна 7 см; большее основание равно 12 см. Найдите среднюю линию трапеции.*

Основным объектом этой задачи является трапеция. В этой трапеции одна из диагоналей перпендикулярна к ее основаниям. Если начнем чертить трапецию обычным способом, т.е. начиная с построения сторон. То обязательно ошибемся.



Лучше начать с построения указанной диагонали. Нужно обратить внимание на то, что эта диагональ перпендикулярна к обеим основаниям трапеции.

Это можно представить так: диагональ - это вертикальный отрезок, от концов которого отходят два горизонтальных отрезка (основания трапеции). Притом в разные стороны. Из чертежа станет ясно. Что углы трапеции у вершин, которые соединяет эта диагональ, должны быть тупыми. Действительно, в задаче дано, что угол при большем основании равен 120°. это должен быть как раз тот угол, вершина которого есть один из концов построенной диагонали.

Теперь построить заданную трапецию нетрудно. Обозначим ее вершины, заданный угол отметим дугой и проведем среднюю линию. Пользуясь принятыми на чертеже обозначениями, запишем все условия и требования задачи. Получаем такую схематическую запись:

*Дано: 1)АВ||D С; 2) ABАС; 3) АСCD; 4)  BAD=120o; 5)АВ=12см; 6) AD =7см; 7) AM=MD; 8) BN=NC.*

*Найти: MN.*

**5. Этапы решения задач.**

Процесс решения задачи состоит из нескольких этапов.

Получив задачу, первое, что нужно сделать, - это разобраться в том, что это за задача, каковы ее условия, в чем состоят ее требования, т.е провести анализ задачи. Этот анализ и составляет *первый этап* процесса решения задачи.

Схематическая запись условия задачи, построение чертежей и т.д. составляет *второй этап* процесса решения задачи.

Анализ задачи и построение ее схематической записи необходимы для того, чтобы найти способ решения данной задачи. Поиск этого способа составляет *третий этап* процесса решения задачи.

Когда способ решения задачи найден, его нужно осуществить, - это будет *четвертый этап* процесса решения — этап осуществления (изложения) решения.

После того как решение осуществлено и изложено , необходимо убедиться. Что это решение правильное, что оно удовлетворяет всем требованиям задачи. Для этого производят проверку решения. Что составляет *пятый этап* процесса решения.

При решении многих задач, кроме проверки, необходимо еще произвести исследование задачи, а именно установить. При каких условиях задача имеет решение и притом сколько различных решений в каждом отдельном случае; при каких условиях задача вообще не имеет решения и т.д. Все это составляет *шестой этап* процесса решения.

Убедившись в правильности решения и, если нужно. Произведя исследование задачи, необходимо четко сформулировать ответ задачи, - это будет *седьмой этап* решения.

Полезно произвести анализ выполненного решения, в частности установить. Нет ли другого. Более рационального способа решения. Нельзя ли задачу обобщить. Какие выводы можно сделать из этого решения и т.д. Все это составляет *восьмой этап* процесса решения.

Таким образом, весь процесс решения задачи можно разделить на восемь этапов: 1-й этап - анализ задачи;

2-й этап - схематическая запись задачи;

3-й этап — поиск способа решения задачи;

4-й этап - осуществление решения задачи;

5-й этап - проверка решения задачи:

6-й этап - исследование задачи;

7-й этап — формулирование ответа задачи;

8-й этап - анализ решения задачи.

Данная схема дает общее представление о процессе решения задач как о сложном и многоплановом процессе.

Структура процесса решения задачи зависит в первую очередь от характера задачи и, конечно, от того, какими знаниями и умениями обладает ученик решающий задачу.

Схема процесса решения задач является лишь примерной. При фактическом решении указанные этапы обычно не отделены друг от друга, а переплетаются между собой. Так, в процессе анализа задачи обычно производится и поиск решения. При этом полный план решения устанавливается не до осуществления решения, а в его процессе. Тогда поиск решения ограничивается лишь нахождением идеи решения. Порядок этапов также может меняться.

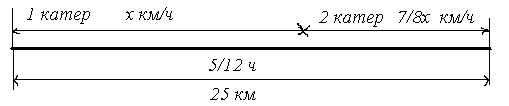
Из указанных восьми этапов пять являются обязательными, и они имеются в

процессе решения любой задачи. Это этапы анализа задачи. Поиска способа ее решения, осуществления решения, проверки решения и формулирования ответа. Остальные три этапа (схематическая запись, исследование задачи и заключительный анализ решения) являются не обязательными и в процессе решения многих задач не имеются.

*Приведем пример решения задачи, на котором покажем конкретно этот процесс.* Задача. *Два катера движутся навстречу друг другу. Сейчас между ними расстояние 25 км.* *Скорость одного из них составляет  — скорости другого. Найдите скорость каждого катера, если известно, что они встретятся через  ч.*

*1.Анализ задачи.* В задачи речь идет о двух объектах: о двух катерах, которые движутся с разными скоростями навстречу друг к другу. Общее расстояние, которое они должны пройти вместе до момента встречи 25 км. Скорость одного их них больше скорости другого. Известно время движения катеров. Нужно найти скорость каждого катера.

*2. Схематическая запись задачи.*



*3.Поиск способа решения задачи.* Так как скорость ни одного из катеров неизвестна, то обозначим скорость одного из них через *х км/ч,* тогда скорость другого равна *—7/8х км/ч .*

Время движения катеров тоже известно *5/12ч.* Отсюда становится ясно, что для решения задачи нужно составить уравнение.

*4. Осуществление решения задачи.* Из условия задачи следует, что

**

Решаем данное уравнение:

**

*х=8*

**

Итак, получаем, что скорость первого катера 8 км/ч, а скорость второго - 7 км/.

*5.Проверка решения.* По условию задачи скорость одного из катеров составляет 7/8 скорости другого. Общее расстояние, которое проходят оба катера вместе за 5/12 ч равно 25 км. Проверяя эти условия, можно убедиться в правильности решения задачи.

*6.Исследование задачи.* В данной задаче этот этап не нужен.

1. *Ответ.* Скорости катеров 8 км/ч и 7 км/ч.
2. *Анализ решения задачи.* Решение этой задачи была сведена к решению линейного уравнения с одной переменной. Нельзя исключить, что данную задачу можно решить другим способом.

**6.Стандартные задачи их решение.**

При решении стандартных задач, пользуясь некоторыми правилами, можно найти последовательность шагов для ее решения. Математика устанавливает для многих видов задач правила, пользуясь которыми можно найти данную последовательность. Для многих видов задач такие правила давно найдены, и они изучаются в школьном курсе математики.

Математические задачи, для решения которых в школьном курсе математики имеются готовые правила или эти правила непосредственно следуют из каких-либо определений или теорем, определяющих программу решения этих задач в виде последовательности шагов называются *стандартными.*

*Рассмотрим некоторые примеры правил.*

*1.Словесное правило.* Примером такого правила является правило возведения произведения в степень произведения.

*2.Правило-формула. Примером* такого правила служит формула для суммы *n*-первых членов арифметической прогрессии:

**

*3.Правило-тождество.* Примером такого правила может служить тождество квадрата двучлена, которое изучается в 7 классе: *(a+b)2=a2+2ab+b2.*

*4.Правило теорема.* Многие теоремы служат правилами для решения задач соответствующего вида. Примером такой теоремы является теорема Пифагора. С помощью этой теоремы можно найти неизвестную сторону прямоугольного треугольника по двум известным сторонам.

*5.Правило-определение.* Примером такого определения является определение решения линейного неравенства с одной переменной.

Для *нестандартных задач* в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения.

**7. Заключение.**

Для того чтобы легко решать задачи (особенно стандартные, потому что остальные задачи сводятся к ним), нужно:

1. помнить все изученные в курсе математики общие правила (формулы, тождества) и общие положения (определения и теоремы). Действительно, чтобы решить какую-либо задачу, нужно в первую очередь распознать ее вид, а для этого нужно хорошо помнить все изученные общие правила и положения, на основе которых решаются задачи соответствующих видов.

Некоторые учащиеся рассуждают так: «Для чего помнить все эти теоремы, формулы... Ведь в случае нужды их можно найти в справочнике или учебнике». Данное рассуждение ошибочно, ибо, конечно, в справочнике действительно можно найти позабытую формулу или теорему, но ведь когда ученику надо решить задачу, то не будет же он перелистывать справочник в поисках формулы, тем более что для решения одной задачи зачастую нужно пользоваться несколькими формулами.

Основные формулы, тождества, определения и теоремы необходимо твердо помнить, с тем, чтобы в любой нужный момент их использовать и чтобы иметь возможность выбрать для решения заданной задачи нужную формулу, теорему и т.д.

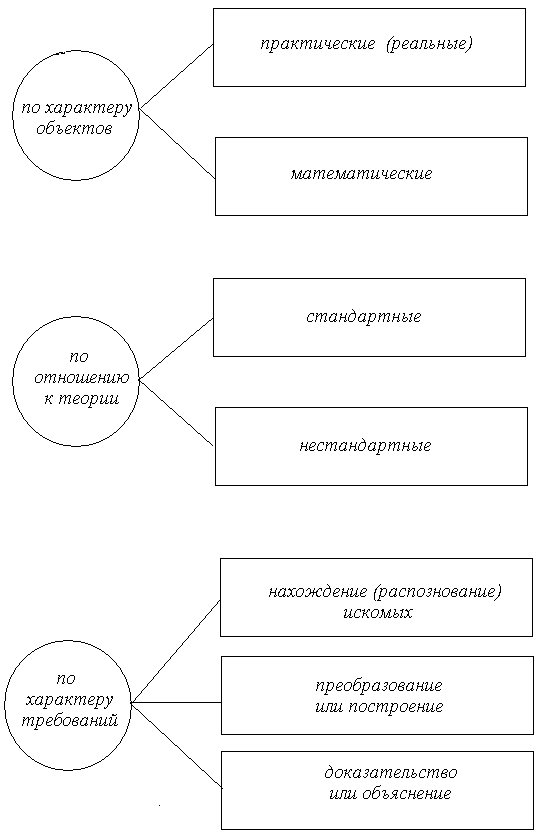
Некоторые мало употребляемые формулы можно не запомнить. Их можно найти из справочников;

1. уметь развертывать свернутые общие правила, формулы, тождества, а также определения и теоремы в программы — последовательности шагов решения задач соответствующих видов.

Этому умению учитель должен научить учащихся, начиная с младших классов обучения в школе.

Обычно в школьном курсе математики не даются готовые программы решения задач. Эти программы нужно извлечь из соответствующих правил, формул, тождеств, определений или теорем. Без этого умения нельзя решить многие простейшие стандартные задачи, а тем более нестандартные задачи, требующие применения нескольких программ.

Приложение 1.

***Виды задач, решаемых в курсе математики.***

Приложение 2.

***Процесс решения задачи.***

